Elektrisches Feld

Formeln

E-Lehre I

Stromstärke

$$I = \frac{Q}{t}$$

Ohmscher Widerstand

$$R = \frac{U}{I}$$

Elektrische Leistung (inkl. ohmscher Widerstand)

$$P = I\,U = R\,I^2 = \frac{U^2}{R}$$

E-Feld/Kondesator

Elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Kapazität eines Kondensators

$$C = \frac{Q}{U}$$

Elektrisches Feld eines Kondensators

$$E = \frac{U}{d}$$

Aufgäbla

Erdbeschleunigung $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$

Nr. 1

Ein Kondensator mit der Kapazität $C = 20\,\mu\mathrm{F}$ wird mit einer Spannung U geladen und an einem ohmschen Widerstand $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$ entladen. Dabei fließt anfänglich ein Strom von $I = 500\,\mathrm{mA}$ Wieviele Elektronen befanden sich auf dem Kondensator, wenn die Ladung eines Elektrons $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ beträgt?

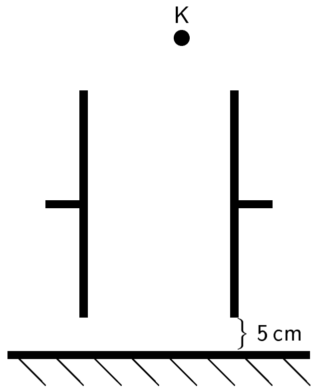
Nr. 2

Ein Pendel mit der Länge $l = 2\,\mathrm{m}$, an dem ein Kügelchen mit der Ladung q zwischen zwei geladenen Kondensatorplatten (Plattenabstand d) hängt, wird um $\varphi = 5^\circ$ ausgelenkt.

- Möchte man die Auslenkung des Konduktorkügelchens durch verschieben einer Kondensatorplatte verändern, muss dann der Kondensator an die Spannungsquelle angeschlossen sein oder nicht?
- Um welche Strecke Δs müsste man die linke Kondensatorplatte verschieben, damit sich die Auslenkung des Kügelchens halbiert?

Nr. 3

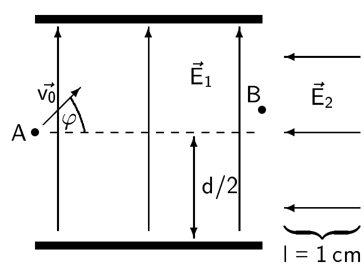
Eine Konduktorkugel K der Masse $m = 100\,\mathrm{g}$ habe die Kapazität $C_1 = 10\,\mathrm{nF}$ und werde an einer Spannungsquelle mit $U_1 = 10\,\mathrm{kV}$ positiv geladen. Die Konduktorkugel wird in der Höhe $h = 10\,\mathrm{cm}$ über einem Plattenkondensator (Plattenabstand $d = 10\,\mathrm{cm}$) mit der Kapazität $C_2 = 0{,}1\,\mathrm{mF}$ fallen gelassen. Der horizontale Abstand von der linken, negativ geladenen Platte beträgt $d_K = 7\,\mathrm{cm}$.



- Zeichne die Feldlinien ein.
- Beide runden Kondensatorplatten haben den Radius $r = 150\,\mathrm{mm}$. Welche Ladung Q muss der Plattenkondensator haben, damit die Kugel gerade noch die negative Platte nicht berührt (Die Luftreibung sei natürlich vernachlässigbar) ?
- Skizziere den Bewegungsverlauf der Kugel, wenn der Kondensator mit der Spannung $U = 6\,\mathrm{kV}$ geladen ist und gib entsprechend geltende Weg-Zeit-Gesetze an, bis die Kugel auf dem Boden liegt.
- Um wieviel Prozent müsste d_K verkleinert werden, damit das Kügelchen bei einer angelegten Kondensatorspannung $U = 6\,\mathrm{kV}$ noch gegen die linke Platte stöße.

Nr. 4

Ein Elektron wird mit der Geschwindigkeit $|\vec{v_0}| = 2{,}5 \cdot 10^7\mathrm{m/s}$ am Punkt A in das elektrische Feld $\vec{E}_1$ eines Plattenkondensators (Plattenabstand $d = 10\,\mathrm{cm}$) mit der Kapazität $C = 100\,\mu\mathrm{F}$ geschossen.



- Wie groß darf der Winkel φ maximal sein, damit das Elektron nicht gegen den Kondensator knallt, wenn der Kondensator mit der Spannung $U = 1\,\mathrm{kV}$ geladen ist?
- Wie lang muss das Feld sein, damit das Elektron es im Punkt B mit der vertikalen Geschwindigkeit $v_{y,1} = -\frac{1}{2}\,v_{y,0}$ verlässt und mit dem Winkel $\varphi = \frac{2}{3}\,\varphi_{\max}$ in das Feld eingeschossen wurde.
- Am Punkt B tritt das Elektron in $\vec{E_2}$ ein. Wie groß muss die Feldstärke E_2 sein, damit das Elektron wieder zurückgeworfen wird, wenn das Feld gerade einmal $l = 1\,\mathrm{cm}$ lang ist?

Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$
Masse eines Elektrons $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Ladung eines Elektrons $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Lösungen

Nr. 1

Am ohmschen Widerstand gilt das ohmsche Gesetz, sodass sich die anfängliche Spannung des Kondensators berechnen lässt

$$U_0 = R\,I = 1\,\mathrm{k}\,\Omega \cdot 0,5\,\mathrm{A} = 500\,\mathrm{V}$$

Der Kondensator war somit mit

$$Q_{=}C\,U_0 = 20\,\mu\mathrm{F} \cdot 500\,\mathrm{V} = 10\,\mathrm{mC}$$

geladen. Dies entspricht

$$N_0 = \frac{Q_0}{e} = \frac{10\,\mathrm{mC}}{1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = \underline{\underline{62,5 \cdot 10^{15}}}$$

Elektronen.

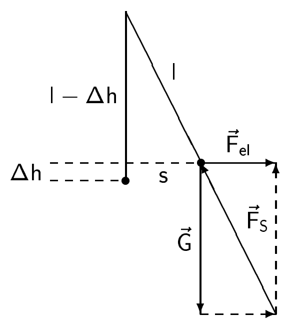
Nr. 2

- Die Auslenkung des Konduktorkügelchens ist (wie unten bewiesen wird) von der Elektrischen Feldstärke abhängig. Dies kann nach

  $$E = \frac{U}{d}$$

  durch verschieben nur verändert werden, wenn die Spannungsquelle angeschlossen ist und die Kondensatorspannung konstant bleibt.

- Der Skizze

  entnimmt man die Ähnlichkeitsbeziehung:

  $$\frac{l - \Delta h}{s} = \frac{G}{F} \tag{1}$$

  Für kleine Auslenkungen ist Δh sehr klein, sodass man

  $$(l - \Delta h) \approx l$$

  setzen kann, womit sich Gl. 1 zu

  $$\frac{l}{s} = \frac{G}{F}$$

  vereinfacht. Löst man nach der gesuchten Auslenkung s auf, so erhält man

  $$s = \frac{F\,l}{G} = \frac{E\,q\,l}{G} = \frac{\frac{U}{d}\,q\,l}{G} = \frac{U\,l\,q}{G} \cdot \frac{1}{d}$$

  Man sieht also, dass gilt

  $$s \sim \frac{1}{d}$$

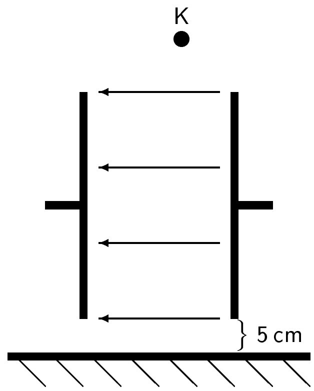
  Wobei die Auslenkung wie oben bereits vereinfacht angenommen

  $$s \sim \varphi$$

  ist. Für eine halb so große Auslenkung, muss also der Plattenabstand verdoppelt werden. Die linke Platte muss also um d nach rechts verschoben werden.

Nr. 3

- Skizze:



- Bis die Kugel in dem Kondensatorfeld ist, benötigt sie die Zeit

$$t_{F,1} = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} = \sqrt{2 \cdot 0,1\,\mathrm{m}}9,81\,\mathrm{m/s^2} = 0,143\,\mathrm{s}$$

Die Fallstrecke, welche die Konduktorkugel zurücklegen muss, bis sie aus dem Feld der Kondensatorplatten wieder heraus ist beträgt

$$s_F = h + 2\,r = 0,1\,\mathrm{m} + 2 \cdot 0,15\,\mathrm{m} = 0,4\,\mathrm{m}$$

Für diese Strecke benötigt die Kugel die Zeit

$$t_{F,2} = \sqrt{\frac{2\,s_1}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,4\,\mathrm{m}}{9,81\,\mathrm{m/s^2}}} = 0,286\,\mathrm{s}$$

Damit die Kugel die linke Kondensatorplatte berührte, müsste sie in der Zeit $\delta t_F = t_{F,2} - t_{F,1} = 0,143\,\mathrm{s}$ während sie sich im Feld befindet, die Distanz d_K zu ihm hin abgelenkt werden. Dazu wäre die Beschleunigung

$$a_F = \frac{2\,d_K}{\Delta t_F^2} = \frac{2 \cdot 0,07\,\mathrm{m}}{0,143^2\,\mathrm{s}^2} = 6,84\,\mathrm{m/s^2}$$

nötig. Die Konduktorkugel hat die Ladung

$$q = C_1\,U_1 = 10\,\mathrm{nF} \cdot 10\,\mathrm{kV} = 10\,\mu\mathrm{C}$$

und erfährt damit in dem Kondensatorfeld die Kraft $F = E\,q$. Diese beschleunigt sie um

$$a = \frac{F}{m} = \frac{E\,q}{m}$$

Für die Feldstärke

$$E_F = \frac{a_F\,m}{q} = \frac{6,84\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0,1\,\mathrm{kg}}{10\,\mu\mathrm{C}} = 68,4\,\mathrm{kV/m}$$

erfährt die Konduktorkugel genau diese Beschleunigung und würde gegen die Kondensatorplatte prallen. Diese Feldstärke tritt bei der Ladung

$$Q = C\,U = C\,E\,d = 0,1\,\mathrm{mF} \cdot 68,4\,\mathrm{kV} \cdot 0,1\,\mathrm{m} = \underline{\underline{684\,\mathrm{mC}}}$$

ein.

- Die Konduktorkugel durchläuft drei Fallphasen (erster Entwurf):

Fallphase	x-Richtung (horizontal)	y-Richtung (vertikal)
1. Vor Eintritt in E-Feld	$v_{x,1} = 0$	$a_y = g$
2. Im E-Feld	$a_{x,2} = E\,q/m$	$a_y = g$
3. Außerhalb des E-Feldes	$v_{x,3} = a_{x,3}\,t_3$	$a_y = g$

Die erste Phase ist, bevor der Konduktor in das Feld der Plattenkondensatoren eintritt. Diese Phase dauert an von $t_0 = 0$ bis $t_{\mathrm{F},1}$. Danach tritt das Kügelchen in das E-Feld ein. Es erfährt die horizontale Beschleunigung

$$a_{x,2} = \frac{E\,q}{m} = \frac{U\,q}{d\,m} = \frac{6\,\mathrm{kV}\cdot 10\,\mu\mathrm{C}}{0,1\,\mathrm{m}\cdot 0,1\,\mathrm{kg}} = 6\,\mathrm{m/s^2}$$

Der Fall durch das Feld dauert bis zur Zeit

$$t_3 = \sqrt{\frac{2\,(h+2\,r)}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0,4\,\mathrm{m}}{9,81\,\mathrm{m/s^2}}} = 0,286\,\mathrm{s}$$

an und dauer die Zeitspanne

$$\Delta t = t_3 - t_2 = 0,286\,\mathrm{s} - 0,143\,\mathrm{s} = 0,143\,\mathrm{s}$$

Während dieser Zeitspanne wird die Kugel nach links auf die Geschwindigkeit

$$v_{x,3} = a_{x,2}\,\Delta t = 6\,\mathrm{m/s^2}\cdot 0,143\,\mathrm{s} = 0,858\,\mathrm{m/s}$$

beschleunigt. Die gesamte Fallzeit beträgt

$$T = \sqrt{\frac{2\,(h+2\,r+5\,\mathrm{cm})}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0,45\,\mathrm{m}}{9,81\,\mathrm{m/s^2}}} = 0,3\,\mathrm{s}$$

Somit lassen sich die Weg-Zeit-Gesetze in y- und x-Richtung vollständig angeben:

$$y = 0,45\,\mathrm{m} - \frac{1}{3}\,a\,t^2 \qquad \text{für} \quad 0\,\mathrm{s} \leq t \leq 0,3\,\mathrm{s}$$

$$x = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0\,\mathrm{s} \leq t \leq 0,143\,\mathrm{s} \\ 3\mathrm{m/s^2}\cdot(t-0,143\,\mathrm{s})^2 & \text{für} \quad 0,143\,\mathrm{s} < t \leq 0,286\,\mathrm{s} \\ 0,143\,\mathrm{m/s}\cdot(t-0,286\,\mathrm{s}) + 6,14\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} & \text{für} \quad 0,286\,\mathrm{s} < t < 0,3\,\mathrm{s} \end{cases}$$

- Die Spannung des „gegenknall Kondensators“ beträgt

$$U_\mathrm{F} = E_\mathrm{F}\,d = 68,4\,\mathrm{kV}\cdot 0,1\,\mathrm{m} = 6,84\,\mathrm{kV}$$

und ist also um den Faktor

$$p = \frac{U_\mathrm{F}}{U} = \frac{6,84\,\mathrm{kV}}{6\,\mathrm{kV}} = 1,14$$

größer als die angelegte Spannung in diesem Fall. Da $E \sim d^{-1}$ ist, müssen also die Platten um den Faktor $p^{-1} = 0,887$ zusammengeschoben werden. Dies bedeutet aber nichts anderes, als eine Abstandsveringerung um $12,3\%$.

Nr. 4

- Die Geschwindigkeit des Elektrons in x-Richtung beträgt

$$v_{y,0} = v_0\,\sin\varphi$$

und somit die kinetische Energie in x-Richtung

$$E_{\mathrm{kin},y,0} = \frac{1}{2}\,m_e\,v_{x,0}^2 = \frac{1}{2}\,m_e\,v_0^2\,\sin^2\varphi$$

Damit das Elektron nicht gegen den Kondensator prallt, muss die potentielle Energie aufnähme größer sein:

$$E_\mathrm{pot} = E_\mathrm{kin} \Longleftrightarrow U\,e = \frac{1}{2}\,m_e\,v_0^2\,\sin^2\varphi$$

woraus sich für den Winkel

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{2\,U\,e}{m_e\,v_0^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1\,\mathrm{kV}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{9,1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}\cdot(2,5\cdot 10^7\,\mathrm{m/s})}} = 0,75$$

Der maximale Winkel beträgt also 48,6°.

- Die kinetische Energie $E_{\text{kin}} \sim v^2$. Also bedeutet die halbe Geschwindigkeit, ein Viertel der kinetischen Energie. Weiterhin ist $E_{\text{pot}} \sim d$. Folglich muss der Punkt B den Abstand $d_B = \frac{1}{4}\,d$ vom oberen Kondensator haben.

  Das Elektron erfährt im Feld die Beschleunigung

$$a = \frac{F}{m} = \frac{E\,e}{m} = \frac{U\,e}{d\,m} = \frac{1\,\mathrm{kV}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}}{0,1\,\mathrm{m}\cdot 9,1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 1,76\cdot 10^{15}\,\mathrm{m/s^2}$$

  Die Abbremsdauer beträgt

$$t_{\text{brems}} = \frac{v_{y,0}}{a} = \frac{v_0\,\sin\varphi}{a} = \frac{2,5\cdot 10^7\,\mathrm{m/s}\cdot \sin\frac{2}{3}\cdot 48,6^\circ}{1,76\cdot 10^{15}\,\mathrm{m/s^2}} = 7,61\,\mathrm{ns}$$

  und die Beschleunigungsdauer

$$t_{\text{beschl}} = \frac{1}{2}\,t_{\text{brems}} = \frac{1}{2}\cdot 7,61\,\mathrm{ns} = 3,81\,\mathrm{ns}$$

  Das Elektron hält sich also in der Zeit

$$T = t_{\text{brems}} + t_{\text{beschl}} = 7,61\,\mathrm{ns} + 3,81\,\mathrm{ns} = 11,42\,\mathrm{ns}$$

  im Feld auf. In dieser Zeit legt es die vertikale Strecke

$$\Delta x = v_x\,T = v_0\,\cos\varphi\cdot T = 2,5\cdot 10^7\,\mathrm{m/s}\cdot\cos 32,4^\circ\cdot 3,81\,\mathrm{ns} = \underline{\underline{8,0\,\mathrm{cm}}}$$

  zurück. Solange muss das Feld sein, damit das Elektron mit halber Anfangs-y-Geschwindigkeit es verlässt.

- Man kann sich vorstellen, dass das Feld das eines Plattenkondensators mit der Spannung U und dem Plattenabstand $l = 1\,\mathrm{cm}$ sei. Das Elektron hat die horizontale Geschwindigkeit $v_x = v_0\cdot\cos\varphi$. Damit es zurückgeworfen wird, darf die kinetische Energie des Elektrons nicht größer sein, als die vom Feld aufgenommene potentielle Energie $E_{\text{pot}} = U\,e$:

$$\frac{1}{2}\,m_e\,v_x^2 = U\,e = E\,d\,e$$

  Damit errechnet sich eine minimale Elektrische Feldstärke von

$$E = \frac{m_e\,v_0^2\,\cos^2\varphi}{2\,e\,d} = \frac{9,1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot(2,5\cdot 10^7\,m/s)^2\cdot\cos^2 32,4^\circ}{2\cdot 0,01\,\mathrm{m}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} = \underline{\underline{126,7\,\mathrm{kV/m}}}$$

  um das Elektron in einem Zentimeter abzubremsen.