Mathematik Abitur

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Analysis

1 Differentialrechnung

Die Ableitung der Funktion $f(x)$ wird mit $f'(x)$ bezeichnet. Eine andere Notationsweise ist

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \tag{1}$$

Mit der d/dx Notation kann man auch ohne die Verwendung von Funktionen Ableitungen darstellen. So ist zum Beispiel

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

1.1 Ableitungsregeln

1.1.1 Kettenregel

Die Kettenregel findet Anwendung, wenn etwas Geklammertes vorliegt.

$$\frac{d}{dx} u\big(v(x)\big) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x) \tag{2}$$

Klammern liegen zum Beispiel auch immer bei Sinus-, Kosinus-, Logarithmus- und Wurzelfunktionen vor.

■ **Beispiel**

$$\frac{d}{dx} \sqrt{3x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 2x + 2}} \cdot (6x + 2) = \frac{3x + 1}{\sqrt{3x^2 + 2x + 2}}$$

■

Es können auch mehrere Ketten hintereinander auftreten. Solche Ableitungen lassen sich am einfachsten bilden, indem man der Reihe nach mit der äußersten Ableitung beginnt und dann nach und nach die inneren Ableitungen als Produkte anhägt. Falls einen innere Ableitung eine Summe ist, so muss diese geklammert werden.

■ **Beispiel**

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\sin\left(e^{x^2}\right) + x^2\right) \\ f'(x) &= \frac{1}{\sin\left(e^{x^2}\right) + x^2} \cdot \left(\cos\left(e^{x^2}\right) \cdot 2x + 2x\right) \\ &= \frac{2x}{\sin\left(e^{x^2}\right) + x^2} \cdot \left(\cos\left(e^{x^2}\right) + 1\right) \end{aligned}$$

■

1.1.2 Produktregel

Wie der Name schon sagt, muss die Produktregel bei Produkten angewendet werden.

$$\frac{d}{dx}\big(u(x) \cdot v(x)\big) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \tag{3}$$

■ **Beispiel**

$$\frac{d}{dx} x \cdot \sin x = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$$

■

Sind mehrere Produkte vorhanden, so leitet man jeweils einen Faktor ab, belässt die anderen Faktoren und addiert alles.

■ **Beispiel**

$$\frac{d}{dx} u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x) \tag{4}$$

■

1.1.3 Quotientenregel

Die Quotientenregel kann oft durch die Produkt- und Kettenregel umgangen werden und sollte nur bei komplizierteren Brüchen angewendet werden.

■ **Beispiel**

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

Leitet man die Funktion mit der Quotientenregel ab, erhält man

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \sqrt{2x+3} - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+3}}}{2x+3} = \frac{-1}{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}$$

Dieses Ergebnis erhält man schneller, wenn man die Funktion vorher umformt

$$f(x) = (2x+3)^{-\frac{1}{2}}$$

Damit ergibt sich für die Ableitung

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\,(2x+3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = \frac{-1}{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}$$

■

Ist die Funktion doch komplizierter, so kommt man um die Quotientenregel nicht herum:

$$\frac{d}{dx}\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\big(v(x)\big)^2} \tag{5}$$

■ **Beispiel**

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

■

1.2 Kurvendiskussion

1.2.1 Extrempunkte

Ein Extrempunkt des Schaubildes der Funktion $f(x)$ kann an der Stelle x_0 vorliegen, wenn die erste Ableitung $f'(x)$ dort eine Nullstelle hat. Dies muss jedoch nicht bedeuten, dass dort auch tatsächlich ein Extrempunkt ist. Um dies festzustellen muss die Ableitung weiter untersucht werden. Ein Hochpunkt liegt dann vor, wenn die Funktion $f(x)$ vom Steigen zum Fallen wechselt. Dies bedeutet, dass die erste Ableitung von Minus nach Plus wechselt, also (im einfachsten Fall) durch diese Nullstelle fällt. Ein Hochpunkt liegt also dann vor, wenn die zweite Ableitung an der Extremstelle negativ ist. Entsprechend ist die Extremstelle ein Tiefpunkt, wenn $f''(x_0)$ positiv ist. Ist $f''(x_0) = 0$, so muss man tatsächlich ermitteln, ob ein Vorzeichenwechsel vorliegt oder nicht.

■ **Beispiel**

Die Funktion

$$f(x) = x \cdot e^{-x^2}$$

hat die Ableitung

$$f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2\,x) = e^{-x^2} \cdot (1 - 2\,x^2)$$

Die erste Ableitung hat an den Stellen $x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $x_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ einfache Nullstellen. Es ist

$$f''\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2\,e} < 0$$

Da die Funktion punktsymmetrisch ist, liegen folgende Extrempunkte vor

$$H\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\right) \qquad T\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{e}}\right)$$

■

1.2.2 Wendepunkte

Wendepunkte sind Extremstellen der ersten Ableitung. An ihnen findet ein Krümmungswechsel statt. Die möglichen Wendestellen erhält man, indem man die Nullstellen der zweiten Ableitung bestimmt und dann ermittelt, ob ein Vorzeichenwechsel vorliegt oder nicht. Im einfachsten Fall gelingt der Nachweis, wenn die dritte Ableitung nicht Null ist, dann liegt mit Sicherheit eine Wendestelle vor.

1.2.3 Ortskurven

Gern gestellte Fragen bei der Untersuchung von Funktionsschaaren ist „Bestimmen Sie die Ortskurve der Hochpunkte der Funktionsschaar.“ Einer solchen Fragestellung geht meist eine Kurvendiskussion voraus, sodass man z.B. die Koordinaten des Hochpunktes (in Abhängigkeit vom Parameter t) bereits hat.

■ **Beispiel**

Gegegen sei die Funktion

$$f_t(x) = e^{-x^2 + t\,x}$$

mit dem Parameter $t \in \mathbb{R}$. Man bestimmte die Koordinaten des Hochpunktes.

Die Ableitung ist

$$f_t'(x) = (t - 2\,x) \cdot e^{-x^2 + t\,x}.$$

Sie hat an der Stelle $x_H = \frac{1}{2}\,t$ eine einfache Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus. Für die Nullstelle der Ableitung ist nur der Term $(t - 2\,x)$ relevant, da $e^{\text{was auch immer}}$ stets größer als Null ist. Der Term $(t - 2\,x)$ ist die Gleichung einer fallenden Gerade, die an ihrer Nullstelle von Plus nach Minus wechselt. An dieser Stelle liegt also ein Hochpunkt vor. Die y-Koordinate des Hochpunktes erhält man durch Einsetzen in die Originalfunktion

$$y_H = f\left(\tfrac{1}{2}\,t\right) = e^{-\left(\frac{1}{2}\,t\right)^2 + t \cdot \frac{1}{2}\,t} = e^{\frac{1}{4}\,t^2}.$$

Der Hochpunkt hat die Koordinaten

$$H\left(\frac{1}{2}\,t\,\middle|\,e^{\frac{1}{4}\,t^2}\right).$$

■

Kennt man die Koordinaten des gewünschten Punktes, so hat man die sogenannte Parameterdarstellung der Ortskurve in der Form

$$x = g(t) \qquad \text{und} \qquad y = h(t)$$

Die explizite Darstellung $y = f(x)$ erhält man, indem man die x-Koordinate nach t auflöst und dann in die y-Koordinate einsetzt.

■ **Beispiel**

Im obigen Beispiel erhielt man für die x-Koordinate des Hochpunktes

$$x = \frac{1}{2}\,t$$

womit sich durch Auflösen nach t

$$t = 2\,x$$

ergibt. Setzt man dies nun in die y-Koordinate des Hochpunktes ein, erhält man direkt die Ortskurve der Hochpunkte

$$y = e^{\frac{1}{4}t^2} = e^{\frac{1}{4}(2x)^2} = e^{x^2}$$

Alle Hochpunkte der Kurvenschaar liegen auf der Kurve mit der Gleichung

$$y = e^{x^2}.$$

■

Ist die x-Koordinate recht kompliziert, kann es einfacher sein, wenn man direkt die Bedingung für Extrempunkte $f_t'(x) = 0$ nach t auflöst.

1.3 Tangenten

Für die Berechnung von Tangenten ist es nochmals nützlich, sich die Punktsteigungsform der Geradengleichung anzuschauen, die man in der 11. Klasse hergeleitet hat. Sie hat folgende Gestalt

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m \tag{6}$$

Dabei sind y_0 und x_0 die Koordinaten eines Punktes und m die Steigung der Geraden. Löst man Gl. (6) nach y auf, hat man die Gleichung der Geraden

$$y = m\,(x - x_0) + y_0 \tag{7}$$

1.3.1 Tangenten an einen Kurvenpunkt

Die Steigung der Tangente an eine Kurve in einem bestimmten Punkt entspricht der Ableitung der Funktion an diesem Punkt. Hat der Punkt die Koordinaten $P(x_0|y_0)$, so lautet die Steigung der Tangente in diesem Punkt

$$m = f'(x_0). \tag{8}$$

Diese Beziehung kann man nun in Gl. (7) einsetzen und erhält damit eine allgemeine Gleichung für die Tangente an Kurve in einem bestimmten Punkt

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0). \tag{9}$$

■ **Beispiel**

Wie lautet die Gleichung der Tangente an die Funktion $f(x) = e^{2x}$ am Punkt $P(0|1)$?

Um die Steigung der Tangente an der Stelle $x_0 = 0$ zu erhalten, benötigt man zunächst die Ableitung der Funktion

$$f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$$

um damit

$$f'(0) = 2 \cdot e^{2\cdot 0} = 2$$

berechnen zu können. Diesen Wert und die Koordinaten des Kurvenpunktes kann man nun direkt in Gl. (9) einsetzen:

$$y = 2 \cdot (x - 0) + 1 = 2x + 1$$

■

1.3.2 Tangenten durch einen Punkt

Das Berechnen einer Tangente wird komplizierter, wenn der Punkt, durch den die Tangente verlaufen soll, nicht auf der Kurve liegt. Um die Gleichung der Tangente dann zu bestimmen, muss man einen allgemeinen Ansatz wählen. Der Punkt, an dem die Tangente die Funktion berührt habe die Koordinate x_0. Die Tangente hat nun wegen Gl. (9) die Gleichung

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Nun muss die Gleichung aber durch den gegebenen Punkt $P(x_P|y_P)$. Damit dies der Fall ist, muss die Punktprobe mit P funktionieren und man erhält folgende Gleichung

$$y_p = f'(x_0) \cdot (x_P - x_0) + f(x_0) \tag{10}$$

Dies ist eine Gleichung, die nur noch von x_0 abhängt, sodass man x_0 nun bestimmen kann. Man muss beachten, dass Gl. (10) mehrere Lösungen haben kann und es daher auch mehrere Tangenten geben kann.

■ **Beispiel**

Man bestimme die Gleichungen aller Tangenten an die Funktion $f(x) = x^2 + 4$, die durch den Punkt $P(-1|1)$ verlaufen.

Da die Funkion $f(x)$ die Ableitung

$$f'(x) = 2\,x$$

hat, lautet die Gleichung der allgemeinen Tangente an der Stelle x_0

$$y = 2\,x_0 \cdot (x - x_0) + \underbrace{x_0^2 + 4}_{f(x_0)}$$

Damit die Tangente durch den Punkt $P(-1|1)$ geht, muss die Punktprobe erfüllt sein

$$\begin{aligned} 1 &= 2\,x_0 \cdot (-1 - x_0) + x_0^2 + 4 \\ 1 &= -2\,x_0 - 2\,x_0^2 + x_0^2 + 2 \\ 0 &= -x_0^2 - 2\,x_0 + 3 \\ x_0 &= -1 \pm 2 \end{aligned}$$

Die zwei Stellen, von denen die Tangenten ausgehen sind also $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$. Dies sind die Kurvenpunkte $P(1|5)$ und $Q(-3|13)$. Nun muss man wie im einfacheren Beispiel noch die Kurventangenten von diesen Punkten aus bestimmen (oder den Taschenrechner bestimmen lassen). Die zwei Tangenten haben die Gleichung

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\,x + 3 \\ y_2 &= -6\,x - 5 \end{aligned}$$

■

Im Zusammenhang mit Kurvenschaaren wird gerne die Frage gestellt, wieviele Tangenten es, in Abhängigkeit vom Parameter, von einem bestimmten Punkt aus gibt. Eine solche Aufgabe führt bei der Lösung meist zu einer quadratischen Gleichung, bei welcher der Parameter unter der Wurzel vorkommt. Hier muss man nun eine Fallunterscheidung vornehmen.

■ **Beispiel**

Wieviele Tangenten kann man in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ vom Punkt $P(-1|1)$ aus an die Kurve $f_t(x) = x^2 + t$ anlegen.

Die Aufgabe ist fast die gleiche wie das letzte Beispiel, man kommt jedoch auf folgende Gleichung für x_0

$$x_0 = -1 \pm \sqrt{t}$$

Für den Fall $t = 0$ gibt es genau eine Tangente. Für $t > 0$ gibt es zwei Tangenten (wie z.B. im obigen Beispiel, als $t = 4$ war). Für den Fall $t < 0$ ist die Wurzel nicht reell und es gibt keine Tangente an die Kurve, die durch P verläuft. ■

2 Integralrechnung

Die Integration einer Funktion ist die Umkehrung der Differentiation einer Funktion. Sie ist im Gegensatz zum Ableiten nicht immer durchführbar. So hat zum Beispiel die Funktion $f(x) = e^{x^2}$ keine triviale Stammfunktion. Ob man eine Funktion richtig aufgeleitet hat, kann man dadurch überprüfen, ob die Ableitung wieder die Ausgangsfunktion ergibt. Durch diese Überlegung lassen sich Integrationsregeln für lineare Ausdrücke bestimmen

2.1 Integrationsregeln

2.1.1 Grundintegrale

Folgenden elementaren Integrale lassen sich durch Ableiten bestätigen:

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^n	$\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\ln x$	$x\,\ln x - x$

2.1.2 Kettenregel für lineare Ausdrücke

Eine einfache Kettenregel, wie die beim Ableiten, existiert bei der Integration nicht. Die Anwendung der Kettenregel beschränkt sich daher auf lineare Ausdrücke. Sei $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$ mit $F'(x) = f(x)$, so gilt

$$\int f(a\,x+b)\,dx = F(a\,x+b)\cdot\frac{1}{a} \tag{11}$$

Dies lässt sich leicht mit der Kettenregel nachvollziehen, indem man Gl. (11) ableitet

$$\frac{d}{dx}F(a\,x+b)\cdot\frac{1}{a} = f(a\,x+b)\cdot\frac{1}{a}\cdot a = f(a\,x+b)$$

In Worten ausgedrückt, verläuft die Integration einer linearen Verkettung folgendermaßen: Man leitet die äußere Funtion auf und teilt durch die Ableitung der inneren. Dies gilt jedoch **nicht** für Terme, die nicht linear sind:

■ **Beispiele**

(1) $\int \sin(3\,x+2)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3\,x+2)$

(2) $\int \sin(3\,x^2+2)\,dx \neq -\frac{1}{6\,x}\cos(3\,x^2+2)$ ■

2.1.3 Integration von gebrochenrationalen Funktionen

Die Integration von gebrochenrationalen Funktionen erfolgt in der Regel über eine Partialbruchzerlegung, kann jedoch in einem Sonderfall einfach durchgeführt werden. Dies sieht man, wenn man eine verkettete Logarithmusfunktion ableitet:

$$\frac{d}{dx}\ln\big(f(x)\big) = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Schreibt man dies um, so erhalt man folgende Integrationsregel

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\big(f(x)\big) \tag{12}$$

Diese Regel kann immer dann angewendet werden, wenn der Zähler die Ableitung des Nenners darstellt.

■ **Beispiele**

(1) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln\big(\cos x\big)$

(2) $\int \frac{6\,x^2-2\,x+\sqrt{2}}{2\,x^3-x^2+\sqrt{2}\,x-9}\,dx = \ln\Big(2\,x^3-x^2+\sqrt{2}\,x-9\Big)$ ■

2.1.4 Bestimmte Integrale

2.2 Uneigentliche Integrale

2.3 Flächenberechnungen

2.3.1 Fläche unter einer Kurve

2.3.2 Fläche zwischen zwei Kurven

2.4 Rotationskörper

2.4.1 Rotation um die x-Achse

2.4.2 Rotation um die y-Achse

2.4.3 Rotation einer Fläche zwischen zwei Kurven

3 Wachstum

3.0.4 Exponentielles Wachstum

3.0.5 Beschränktes Wachstum

4 Folgen

Teil II
Analytische Geometrie

5 Vektoren

6 Darstellung von Geraden und Ebenen

7 Schnitte

7.1 Schnittpunkt zweier Geraden

7.2 Schnittpunkt Geraden - Ebene

7.3 Schnittgerade zweier Ebenen

8 Abstände

8.1 Abstand Punkt - Ebene

8.2 Abstand Punkt - Gerade

8.3 Abstand Gerade - Gerade

8.3.1 Abstand paralleler Geraden

8.3.2 Abstand windschiefer Geraden

9 Formelsammlung

Analysis

Grundintegrale und -ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)\,dx$
x^n	$n\,x^{n-1}$	$\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\,\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x\,\ln x - x$

Ableitungsregeln

Kettenregel

$$\frac{d}{dx}\,u\big(v(x)\big) = u'\big(v(x)\big)\cdot v'(x)$$

Produktregel

$$\frac{d}{dx}\,\big(u(x)\cdot v(x)\big) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\,\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big(v(x)\big)^2}$$

Integrationsregeln

Umkehrung der Kettenregel für lineare Ketten

$$\int f(a\,x+b)\,dx = F(a\,x+b)\cdot\frac{1}{a}$$

Spezialfall einer geborchenrationalen Funktion

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\big(f(x)\big)$$

Prudukintegration (weniger wichtig)

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

Kurvendiskussion

Hochpunkt: $f'(x_0) = 0$ und es liegt ein Vorzeichenwechsel von Plus nach Minus vor (vom Steigen zum Fallen). Dies ist der Fall bei $f''(x_0) < 0$.
Tiefpunkt: $f'(x_0) = 0$ und es liegt ein Vorzeichenwechsel von Minus nach Plus vor (vom Fallen zum Steigen). Dies ist der Fall bei $f''(x_0) > 0$.
Wendepunkt: Extremstelle der ersten Ableitung. $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

Flächeninhalte und Volumina

Fläche unter der Kurve von $f(x)$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

Fläche zwischen den Kurven von $f(x)$ und $g(x)$, wenn $f(x) > g(x)$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Rotationsvolumen um die x-Achse von der Kurve von $f(x)$

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\,dx$$

Rotationsvolumen um die x-Achse der Fläche zwischen den Kurven von $f(x)$ und $g(x)$, wenn $f(x) > g(x)$

$$V_{x,\mathrm{diff}} = \pi \int_{x_1}^{x_2} \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\,dx$$

Rotationsvolumen um die y-Achse

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} f^2(y)\,dy$$

Wichtige Grenzwerte

- $e^x \to \infty$ für $x \to \infty$
- $e^x \to 0$ für $x \to -\infty$
- $x^n \cdot e^x \to 0$ für $x \to -\infty$

Wichtige Trigonometrische Identitäten

Folgende Gleichungen sind wichtig zum Lösen von trigonometrischen Gleichungen oder trigonometrischen Integralen:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(2\,x) = 2\,\sin(x)\,\cos(x)$$
$$\cos(2\,x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Analytische Geometrie

Abstände

Abstand Ebene ($n_1\,x_1 + n_2\,x_2 + n_3\,x_3 - a = 0$) - Punkt ($\vec{p}$)

$$d = \frac{n_1\,p_1 + n_2\,p_2 + n_3\,p_3 - a}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$$

Abstand Gerade ($vecx = \vec{p} + t\,\vec{u}$) - Punkt ($\vec{q}$)

$$d = \frac{|(\vec{p} - \vec{q}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Abstand Punkt ($\vec{p}$) - Punkt ($\vec{q}$)

$$d = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2} = |\vec{p} - \vec{q}|$$

Winkel

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \vec{b}}\right| = \left|\frac{a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\right|$$